No. Date 4/12/17

Απ.1.

Συνδυασμός συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα: Έστω $f,g: A \to \mathbb{R}$ και έστω $b \in \mathbb{R}$. Έστω επίσης $c \in A$
και ότι οι f,g είναι συνεχείς στο c.
α) Τότε $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και $b \cdot f$ είναι συνεχείς στο c
b) Εάν $h: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $c \in A$ και $h(x) \neq 0$ $\forall x \in A$
τότε $\frac{f}{h}$ συνεχής στο c

$\forall x \in V_\delta(c) = (c-\delta, c+\delta) \cap A$

Εφαρμογή
$f(x) = \sin x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$
$h(x) = \cos x$ >> στο $\mathbb{R}$
$\xrightarrow{(b)}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ συνεχής στο
$\mathbb{R} \setminus \{ \kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z} \}$

$A = \mathbb{R} \setminus \{ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \}$

$h(x) = \cos x \neq 0 \quad \forall x \in A$

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σύνολο τότε είναι συνεχής σε κάθε υποσύνολό του.

Σύνθεση Συνεχών Συναρτήσεων

Θεώρημα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(A) \subseteq B$. Εάν η f είναι συνεχής στο $c \in A$ και g συνεχής στο $b = f(c) \in B$, τότε η σύνθεση $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο c

Υπόδειξη Απόδειξης: $x_n \in A$ $x_n \to c$ ν.δ.ο. $g(f(x_n)) \to g(f(c))$
Αφού f συνεχής στο c $\rightsquigarrow f(x_n) \to f(c)$
Έχω επίσης $y_n = f(x_n) \in f(A) \subseteq B$. $\rightsquigarrow y_n \in B$
$y_n \to f(c)$

<u>Παράδειγμα</u>

$f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,\infty)$

Υπόδειξη: Έστω $x_n\to c$ και $x_n\in[0,\infty)$

Ν.Δ.Ο. $\sqrt{x_n}\to\sqrt{c}$

Τυχαίο $c\in[0,\infty)$

<u>Για το σπίτι</u>: <u>Άσκηση</u>: ① $h(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}}{x}$ $\quad x\neq 0$

Να δειχθεί ότι είναι συνεχής.

- Βλέπω αν ορίζεται (Ναι αφού $1+\sin x\leq 2$ ...)

② $h(x)=\cos(\sqrt{1+x^2})$ $\quad x\in\mathbb{R}$

Να δειχθεί ότι είναι συνεχής

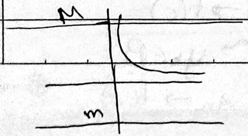
<u>Συνεχείς Συναρτήσεις σε Διαστήματα</u>

<u>Ορισμός</u>: Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται φραγμένη στο A εάν $\exists$ $M>0$ τ.ω. $|f(x)|\leq M$ $\forall x\in A$
($f(A)$ να είναι φραγμένο σύνολο)

Παρατήρηση: Εάν $f:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμ. στο A $\Rightarrow$
$\forall M>0$, $\exists x_M\in A$ τ.ω. $|f(x_M)|>M$

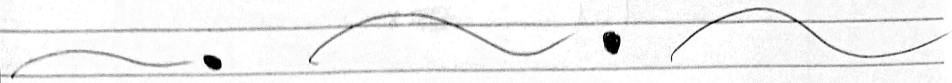
<u>Παράδειγμα</u>

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad A=(0,\infty)$ δεν είναι φραγμένη στο A



$\forall M>0$ $\exists x_M$ τ.ω. $f(x_M)>M$

Αν $x_M = \frac{1}{M+1} \in A$ $\rightsquigarrow f(x_M) = M+1 > M$



Θεώρημα Φραγμότητας: Έστω $I=[a,b]$ κλειστό και φραγμένο διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε η f είναι φραγμένη στο I

Απόδειξη

Με άτοπο. Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη στο I. Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in I$ τ.ω. $|f(x_n)| \geq n$ (1)

Έχουμε $a \leq x_n \leq b$ $\forall n$, δηλαδή (x_n) φραγμένη

Άρα από Bolzano-Weierstrass $\exists$ υπακολουθία $x_{k_n} \to x_\infty$

$a \leq x_{k_n} \leq b \rightsquigarrow a \leq x_\infty \leq b$

Αφού η f συνεχής στο $I=[a,b]$: $f(x_{k_n}) \to f(x_\infty) \rightsquigarrow |f(x_{k_n})| \to |f(x_\infty)| \in \mathbb{R}$

Όμως από (1): $|f(x_{k_n})| > k_n \rightsquigarrow |f(x_{k_n})| \to +\infty$ Άτοπο

*Το x_∞ δεν βγαίνει έξω από το πεδίο ορισμού της f.

(Η ακολουθία x_n λέγεται ακολουθία αντίφασης

Παρατήρηση: Στο παραπάνω θεώρημα είναι σημαντικό $I=[a,b]$ με $a,b \in \mathbb{R}$

Όπως: (i) Έστω $f(x)=x$ $A=[0,\infty)$. Τότε η f είναι συνεχής στο A αλλά δεν είναι φραγμένη στο A

(ii) Έστω $g(x)=\frac{1}{x}$ $B=(0,1]$. Η g είναι συνεχής στο B αλλά δεν είναι φραγμένη στο B

(iii) $h(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0\end{cases}$ $\quad h:C\to\mathbb{R}$ με $C=[0,1]$

Ορισμός: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $f:A\to\mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει ολικό μέγιστο στο A εάν $\exists x^*\in A$ τ.ω. $f(x^*)\geq f(x)\ \forall x\in A$

Λέμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο στο A εάν $\exists x_*\in A$ τ.ω. $f(x_*)\leq f(x)\ \forall x\in A$

Λέμε ότι x^* είναι σημ. ολικού μεγίστου για την f στο A

» x_* » ελαχίστου »

Παρατήρηση: Η $f(x)=\frac{1}{x}$ δεν έχει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο στο $A=(0,\infty)$

Έστω ότι η f είχε ολικό ελάχιστο στο A

$\rightsquigarrow \exists x_*\in(0,\infty)$ τ.ω. $f(x)\geq f(x_*)\ \forall x\in(0,\infty)$

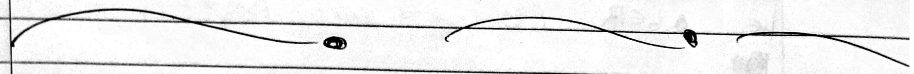
$\rightsquigarrow x_*\geq x\ \forall x\in(0,\infty)$ Άτοπο

(πάρτε $x=2x_*$)

Σπίτι: Για ολικό μέγιστο

Σπίτι: Η $g(x)=x^2$ $\quad A=[-1,1]$

(Αν ορίζοταν η x^2 στο $(-1,1)$ τότε δεν έχει ολικό μέγιστο στο $(-1,1)$)



Θεώρημα: Έστω $I=[a,b]$ με $a,b\in\mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο διάστημα και $f:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε η f έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο I.